Selbsttest

Formen Sie die nach Themengebieten geordneten Ausdrücke (Terme) um, lösen Sie die Gleichungen bzw. Sachaufgaben. Wenn möglich, machen Sie die Probe.

1. Aufgaben

1.1. Bruchrechnen

a) $\frac{2}{3}+\frac{4}{5}=$

b) $\frac{5}{2}-\frac{1}{6}=$

c) $\frac{9}{4}\cdot\frac{4}{5}=$

d) $\frac{2}{3}:\frac{6}{x}=$

e) $\frac{2x}{3}+\frac{9}{x-1}=$

f) $\frac{7\left(y^2-1\right)}{y+1}+\frac{9}{y^2-1}=$

1.2. Dreisatz, Proportionen

a) Ein Auto verbraucht für eine 752 km lange Strecke 63,2 l Super. Wie hoch ist der Verbrauch auf 100 km?

b) Zwei Maler brauchen 5 Tage, um eine Fläche von $350m^2$ zu tapezieren. Wie viele Tage brauchen 3 Maler?

c) Familie Meier bezahlt für ihre 50qm große Wohnung eine Miete von 420 €. Darin sind ein von der Größe der Wohnung abhängiger Mietzins und ein Festkostenanteil von 50 € enthalten. Familie Schulz interessiert sich für eine 75 qm große Wohnung zu gleichen Mietbedingungen. Wie hoch sind die monatlichen Kosten?

1.3. Prozentrechnen:

a) Wie viel sind 7% von 5430 €?

b) Beim Kauf einer Waschmaschine zu einem Preis von 546 € werden Ihnen 3% Skonto gewährt.

c) Der Rabatt beträgt 12 € oder 4%. Wie teuer war die Ware?

d) Der Nachlass einer Ware beträgt 27,20 €, der Ursprungspreis war 150,00 €. viel Prozent Rabatt wurde gewährt?

e) Eine Firma produziert 25.000 Stück von Teil A und 33.000 Stück von Teil B. ist die prozentuale Aufteilung der Produktion?

f) Die Kapazität einer Maschine soll in 2 Jahren jährlich um den gleichen Prozentsatz steigen. Dabei sollen statt 1200 Stück/Minute nun 1500 Stück/Minute produziert werden. Wie hoch muss das jährliche prozentuale Wachstum sein?

1.4. Binomische Formeln / Quadratische Ausdrücke (Terme) / pq-Formel für quadratische Gleichungen

a) $(a+2)^2 =$

b) $u^2 - 6u + 9 =$

c) $\left(s - \frac{1}{5}\right)^2 =$

d) $t^2 - 36 =$

e) $(x+2)(x-7) =$

f) $\left(u + \frac{3}{4}\right)(u+8) =$

g) $x^2 + 5x + 6 = 0$

h) $u^2 + 2u - 15 = 0$

i) $y^2 - 10y = 0$

1.5. Potenzgesetze

a) $7^3 \bullet 7^5 =$

b) $c^6 \bullet c^{12} =$

c) $3a^3 + 6a^5 =$

d) $u^5 : u^2 =$

e) $v^5 : v^9 =$

f) $64^{1/2} =$

g) $81^{1/4} =$

h) $\sqrt[3]{s^2} \bullet \sqrt[6]{s} =$

1.6. Lösen Sie folgende Gleichungen:

a) $7x + \frac{5}{6} = -2x + 12$

b) $u^2 - 6u + 8 = 2u^2 - 5u + 6$

c) $v^3 - v^2 = 12v$

d) $\sqrt[5]{x^3} = -27$

e) $\sqrt[3]{x^2} = -\frac{1}{8}$

1.7. Exponentialausdrücke und Logarithmen

a) $2^x = 128$

b) $\log_2(64) =$

c) $7^x : 7^5 = 49$

d) $\log_{bel.Basis>0}(a \bullet b) =$

e) $\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4}t\right) =$

f) $\log_{bel.Basis>0}(a^b) =$

g) $\lg(10.000) =$

Lösungen

1.1. Bruchrechnen

a) $\frac{2}{3}+\frac{4}{5}=\frac{10+12}{15}=\frac{22}{15}$

b) $\frac{5}{2}-\frac{1}{6}=\frac{15-1}{6}=\frac{14}{6}=\frac{7}{3}$

c) $\frac{9}{4}\cdot\frac{4}{5}=\frac{9}{5}$

d) $\frac{2}{3}:\frac{6}{x}=\frac{2\cdot x}{3\cdot 6}=\frac{x}{9}$

e) $\frac{2x}{3}+\frac{9}{x-1}=\frac{2x\left(x-1\right)+9\cdot 3}{3\left(x-1\right)}=\frac{2x^2-2x+27}{3x-3}$

f) $\frac{7\left(y^2-1\right)}{y+1}+\frac{9}{y^2-1}=\frac{7\left(y^2-1\right)}{y+1}+\frac{9}{\left(y-1\right)\left(y+1\right)}$

$=\frac{7\left(y^2-1\right)\left(y-1\right)}{\left(y+1\right)\left(y-1\right)}+\frac{9}{\left(y-1\right)\left(y+1\right)}$

$=\frac{7\left(y^3-y^2-y+1\right)+9}{y^2-1}$

1.2. Dreisatz

a) Proportionaler Zusammenhang: $\frac{x\ l}{63{,}2\ l} = \frac{100\ km}{752\ km}$; $x = 8{,}40\ l$

b) Umgekehrt proportionaler Zusammenhang

Rechenweg 1: Wie viele Tage braucht ein Maler, um diese Fläche zu tapezieren?

$\frac{2\ M}{1\ M} = \frac{x\ T}{5\ T}$. Ein Maler braucht also 10 Tage. (;-) Wer hätte das gedacht?!).

Damit brauchen 3 Maler $\frac{3\ M}{1\ M} = \frac{10\ T}{xT}$, also 3 Tage und bei einem 8 Stundentag noch 2h und 40 min.

Rechenweg 2: Die Angaben werden direkt ins umgekehrt proportionale Verhältnis gesetzt: $\frac{2\ M}{3\ M} = \frac{x\ T}{5T}$ und damit ebenfalls 3,3 Tage. Interessant ist: Die Größe der Fläche spielt gar keine Rolle.

c) Der Anteil der Miete, der auf die Größe der Wohnung bezogen wird, ist $\frac{420\ € - 50\ €}{50\ m^2}$.
Das ergibt folgende Proportion $\frac{420\ € - 50\ €}{50\ m^2} = \frac{x\ €}{75\ m^2}$, also $x = 555$ € variabler Mietanteil, insgesamt also 605 €.

1.3. Prozentrechnen

a) $x = \frac{7}{100} \cdot 5430\,€ = 0{,}07 \cdot 5430\,€ = 380{,}10\,€$ oder $\frac{7\%}{100\%} = \frac{x\,€}{5430\,€}$ $\quad x = 380{,}1€$

380,10 € sind 7% von 5430,00€

b) $Skonto = 0{,}03 \cdot 546\,€ = 16{,}38\,€$.

c) $\frac{4}{100} = \frac{12\,€}{x\,€} \quad x = 300\,€$

d) $\frac{x}{100} = \frac{27{,}2\,€}{150\,€} \quad x = 18{,}13\%$

e) Gesamtproduktion: 25.000 Stück+33.000 Stück=58.100 Stück. Daraus berechnet sich der prozentuale Anteil von Teil A zu $\frac{25.000\ Stück}{58.000\ Stück} = \frac{x}{100\ \%} \quad x = 43{,}1\ \%$ und der prozentuale Anteil von Teil B demzufolge 56,9%.

f) sei der gesuchte Prozentsatz. Dann ist die Kapazität nach einem Jahr:

$K_1 = 1200 \cdot \frac{p}{100}$ und die Kapazität im 2. Jahr, ausgehend von K_1 gegeben durch

$K_2 = K_1 \cdot \frac{p}{100}$. Einsetzen von K_1 liefert

$K_2 = \left(1200 \cdot \frac{p}{100}\right) \cdot \frac{p}{100} = 1500,\ \frac{p^2}{10000} = \frac{1500}{1200}, \quad p = \sqrt{\frac{15}{12} \cdot 10000} = 111{,}8.$

Dies bedeutet:
Die Kapazität von 1200 entspricht 100%, nach einem Jahr werden 111,8 % produziert, die Zunahme beträgt pro Jahr 11,88 %.

1.4. Binomische Formeln / Quadratische Ausdrücke (Terme) / pq-Formel für quadratische Gleichungen

a) $(a+2)^2 = a^2 + 4a + 4$

b) $u^2 - 6u + 9 = (u-3)^2$

c) $\left(s - \frac{1}{5}\right)^2 = s^2 - \frac{2}{5}s + \frac{1}{25}$

d) $t^2 - 36 = (t-6)(t+6)$

e) $(x+2)(x-7) = x^2 + 2x - 7x - 14 = x^2 - 5x - 14$

f) $\left(u + \frac{3}{4}\right)(u+8) = u^2 + 8u + \frac{3}{4}u + 6 = u^2 + \frac{35}{4}u + 6$

g) $x_{1,2} = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 6}$

$x_{1,2} = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}}$ $\quad x_1 = -\frac{5}{2} + \frac{1}{2} = -2;$ $\quad x_2 = -3$

Probe: $\begin{array}{r} (-2)^2 - 10 + 6 = 0 \\ 9 - 15 + 6 = 0 \end{array}$, insbesondere gilt $x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3)$

h) $u_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+15}$

$u_1 = 3 \quad u_2 = -5$

i) $y(y-10) = 0 \quad y_1 = 0 \quad y_2 = 10$

1.5. Potenzgesetze

a) $7^3 \cdot 7^3 = 7^{3+5} = 7^8$

b) $c^6 \cdot c^{12} = c^{18}$

c) $3a^3 + 6a^5 = 3a^3(1 + 2a^2)$

d) $u^5 : u^2 = \frac{u^5}{u^2} = u^{5-2} = u^3$

e) $v^5 : v^9 = \frac{v^5}{v^9} = \frac{1}{v^4} = v^{-4}$

f) $64^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{64} = 8$

g) $81^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{81} = 3$

h) $\sqrt[3]{s^2} \cdot \sqrt[6]{s} = s^{\frac{2}{3}} \cdot s^{\frac{1}{6}} = s^{\frac{2}{3}+\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{s^5}$

1.6. Lösen Sie folgende Gleichungen:

a) $9x = \frac{72-5}{6}$ $\quad x = \frac{67}{54}$

b) Achtung: Vor Anwenden der pq-Formel die Gleichung erst in Normalform bringen.

$-u^2 - u + 2 = 0 \quad u_1 = 1 \quad u_2 = -2$

c) $v(v^2 - v - 12) \quad v_1 = 0 \quad v_2 = -3 \quad v_3 = 4$

d) $\sqrt[5]{x^3} = 27$

Auf beiden Seiten mit 5 potenzieren: $x^3 = (-27)^5 = -14.348.907$ und dann die dritte Wurzel ziehen: $x = -243$.

e) $\sqrt[3]{x^2} = -\frac{1}{8}$

Analog zu d): $x^2 = \left(-\frac{1}{8}\right)^3 = -\frac{1}{512}$. Die Gleichung besitzt keine Lösung, da keine zweite Wurzel aus einer negativen Zahl existiert.

1.7. Exponentialausdrücke und Logarithmen, Gleichungen

a) $2^x = 128$: $x = 7$, denn $2^7 = 128$ $7 = \log_2 128$

b) $\log_2(64) = 6$; denn $2^6 = 64$

c) $7^x : 7^5 = 49$ $7^{x-5} = 7^2$ $x - 5 = 2$

oder

$x - 5 = \log_7(49)$ $x - 5 = 2$

d) Rechengesetz: $\log_{bel.Basis>0}(a \cdot b) = \log_{bel.Basis>0}(a) + \log_{bel.Basis>0}(b)$

e) Anwendung des Gesetzes:

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(\tfrac{1}{4}t\right) = \log_{\frac{1}{2}}\left(\tfrac{1}{4} \cdot t\right) = \log_{\frac{1}{2}}\left(\tfrac{1}{4}\right) + \log_{\frac{1}{2}}(t) = 2 + \log_{\frac{1}{2}}(t)$$

denn $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

f) Rechengesetz: $\log_{bel.Basis>0}(a^b) = b \cdot \log_{bel.Basis>0}(a)$

g) Anwendung:

$\lg(10.000) = 4$, denn $10^4 = 10.000$

oder $\lg(10.000) = \lg\left(10^4\right) = 4 \cdot \lg(10) = 4 \cdot 1 = 4$